



УДК: 530.182
MSC 2010: 37B20

Статистика времен возврата Пуанкаре в неавтономном одномерном хаотическом отображении

Я. И. Боев, Н. И. Бирюкова, В. С. Анищенко

Методами численного эксперимента исследована статистика времени возврата Пуанкаре в одномерном кубическом отображении в присутствии гармонического и шумового возмущений. Показано, что в присутствии гармонического воздействия плотность распределения времен возвратов является периодически промодулированной функцией. Теория размерности Афраймовича–Песина применима к неавтономному отображению как при гармоническом, так и при шумовом возмущениях. В неавтономной системе взаимосвязь АП-размерности с показателями Ляпунова нарушается.

Ключевые слова: возвраты Пуанкаре, вероятностная мера, размерность Афраймовича–Песина

Введение

Для динамических систем с заданной мерой статистические характеристики времен возврата Пуанкаре достаточно детально исследованы как теоретически [1–4], так и экспериментально [5, 6]. При этом в большинстве работ анализируются автономные системы. В работе [7] дано теоретическое обобщение известной теоремы Пуанкаре [1] на случай динамических систем, находящихся под внешним гармоническим воздействием. Доказано, что

Получено 14 января 2014 года
После доработки 24 января 2014 года

Работа поддержана грантом РФФИ № 13-02-00216.

Боев Ярослав Игоревич
boev.yaroslav@gmail.com
Бирюкова Надежда Игоревна
biryukovanadezhda@gmail.com
Анищенко Вадим Семёнович
wadim@info.sgu.ru
Международный НИИ нелинейной динамики
Саратовского государственного университета
410026, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

неавтономная система с заданной мерой характеризуется устойчивостью по Пуассону, то есть имеет место возвращаемость фазовых траекторий в окрестность практически любой заданной начальной точки. Однако следует отметить, что детального анализа особенностей статистики времен возврата в неавтономных системах до сих пор, по сути, не проведено. Это касается как классического локального, так и глобального подходов при теоретическом анализе возвратов Пуанкаре. Из доказательства устойчивости по Пуассону для неавтономных систем [7] безоговорочно следует справедливость теоремы Каца [2] о взаимосвязи среднего возврата с вероятностью посещения траекторией заданной окрестности выбранного начального состояния. Однако закон распределения времен возврата в неавтономных системах в строгом смысле не является экспоненциальным [8]. Не ясно, каким образом будет зависеть и размерность последовательности времен возвратов (размерность Афраймовича–Песина, или АП-размерность [4, 9]) от параметров гармонического воздействия. Нет ясности и в вопросе изменения вероятностной меры неавтономной системы от амплитуды и частоты внешней гармонической силы, а именно вероятностная мера аттрактора системы является определяющей характеристикой статистики времен возврата Пуанкаре [5].

В связи с вышесказанным целью настоящей статьи является исследование закономерностей трансформации плотности распределения $p(x)$, плотности распределения времен возврата $p(\tau_r)$, АП-размерности и других статистических характеристик времен возврата при вариации параметров внешнего гармонического воздействия на систему. Учитывая, что выводы существующей теории не зависят от размерности фазового пространства системы, в качестве исходной динамической системы было выбрано одномерное кубическое отображение с хаотической динамикой. Система характеризуется положительной топологической энтропией $h_T > 0$, является перемешивающей в силу положительности показателя Ляпунова $\lambda^+ > 0$ и, соответственно, эргодической.

1. Исследуемая система. Возвраты Пуанкаре в автономном режиме

Рассмотрим одномерное отображение, заданное соотношением

$$x_{n+1} = (\alpha x_n - x_n^3) \exp\left(-\frac{x_n^2}{b}\right) + A \sin(\Omega n) + \sqrt{2D}\xi(n), \quad (1.1)$$

где α и b — управляющие параметры (параметр b фиксирован и равен 10), A и Ω — амплитуда и частота внешнего воздействия, D — интенсивность шума, $\xi(n)$ — источник нормированного белого шума.

Отображение (1.1) имеет состояние равновесия в нуле координат и два состояния равновесия, симметрично расположенные на оси OX относительно нуля. По мере увеличения параметра α в окрестности каждого из последних имеет место каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся рождением хаотического аттрактора. Отметим, что отображение (1.1) не относится к классу гиперболических систем, являясь системой с квазиаттрактором. Поэтому анализ характеристик времен возврата Пуанкаре позволит проверить применимость результатов теории к негиперболическим системам.

Сначала рассмотрим динамику системы (1.1) в автономном режиме ($A = 0$). При $\alpha < \alpha^* = 2.839\dots$ в системе сосуществуют два симметричных относительно седлового состояния равновесия $x_n^0 = 0$ хаотических аттрактора. При $\alpha = \alpha^*$ имеет место кризис объединения аттракторов и возникает эффект перемежаемости типа «хаос–хаос» [10, 11].

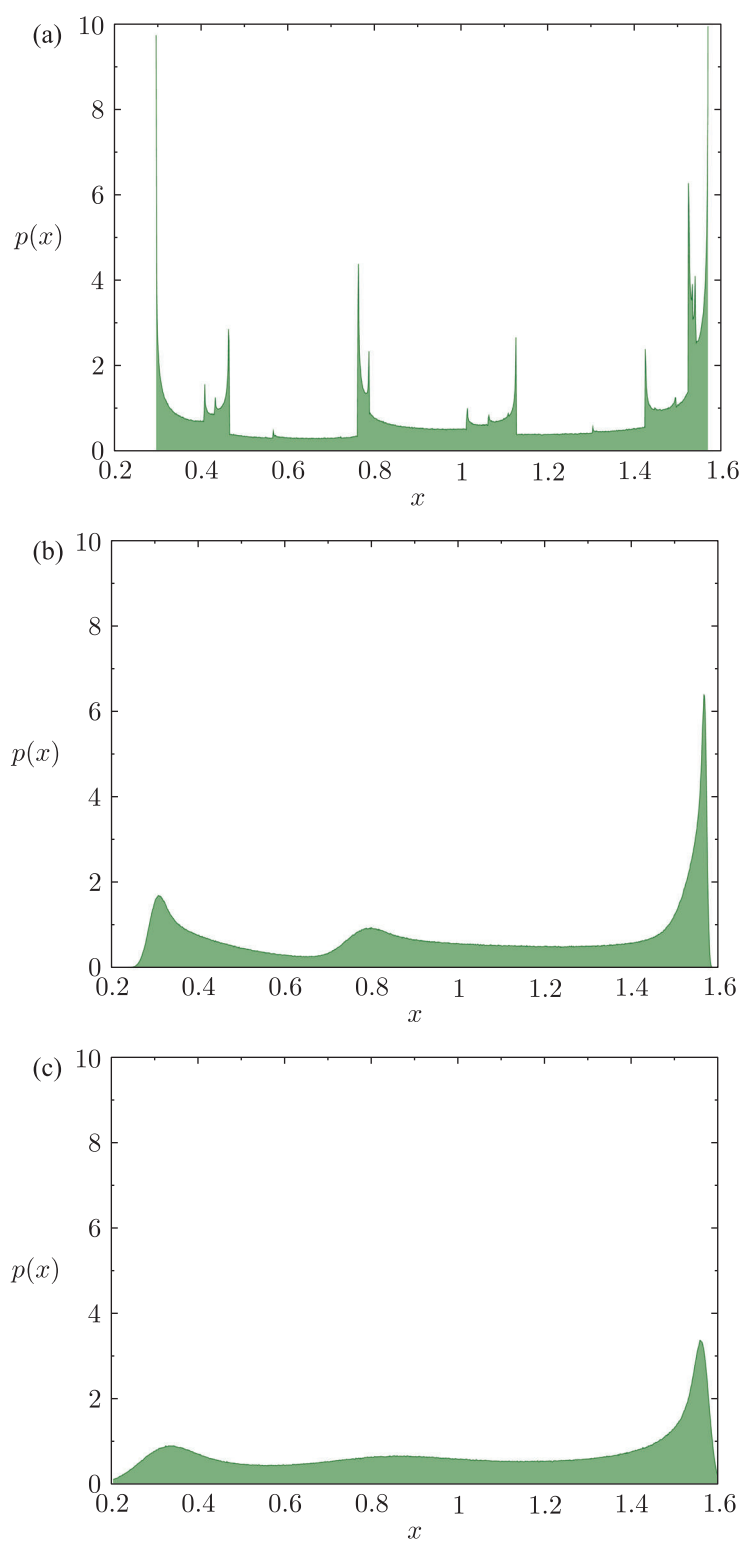


Рис. 1. Плотность распределения вероятности $p(x)$ для различных значений интенсивности шума: (a) $D = 0$, (b) $D = 10^{-5}$, (c) $D = 10^{-4}$. Фиксированные значения параметров системы (1.1): $\alpha = 2.7$, $A = 0$.

Зафиксируем значение управляющего параметра $\alpha = 2.7$. Так как аттракторы симметричны, их характеристики аналогичны. Поэтому выберем начальную точку на положительной полуоси и будем рассматривать только один аттрактор.

Известно, что обоснование существования вероятностной меры для квазиаттракторов связано с определенными трудностями. Эти трудности можно преодолеть путем добавления в систему аддитивного источника шума. В этом случае квазиаттрактор приобретает свойства почти гиперболического и характеризуется наличием вероятностной меры [12, 13].

Рассмотрим эволюцию плотности распределения вероятности $p(x, D)$ при изменении интенсивности внешнего шума. Из рисунка 1 видно, что с увеличением интенсивности шума плотность распределения сглаживается и ее форма заметно меняется. Как показано в работах [5, 14], система (1.1) как в отсутствие, так и при наличии шума характеризуется статистикой времен возврата Пуанкаре, которая полностью соответствует выводам локальной и глобальной теории возвратов. Как видно из рисунка 1, интенсивность шума влияет на форму закона распределения $p(x)$, что позволяет управлять статистическими характеристиками последовательности времен возвратов.

Например, среднее время возврата $\langle \tau_r \rangle$, дисперсия $\sigma^2(\tau_r)$ и размерность Афраймовича – Песина α_C становятся зависящими от интенсивности шума D .

Для иллюстрации сказанного рассмотрим, как меняется закон распределения времен возврата $p(\tau_r)$ при действии шума. С этой целью проведем расчет плотности распределения $p(\tau_r)$ времен возврата в окрестность ε точки x_0 , выбрав $x_0 = 0.76$ и $\varepsilon = 0.01$. Результаты эксперимента представлены на рисунке 2.

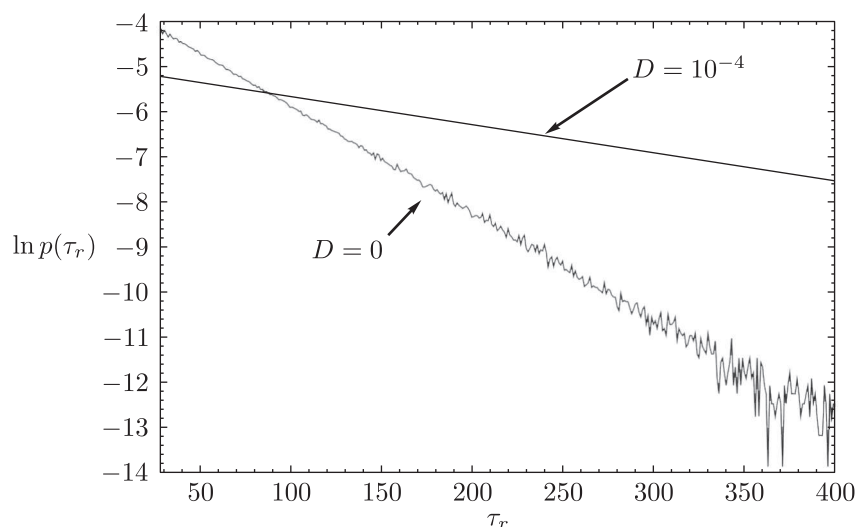


Рис. 2. Плотность распределения времен возврата в автономной системе (1.1) для различных значений интенсивности шума D при значениях параметров $\alpha = 2.7$, $A = 0$ и $x_0 = 0.76$, $\varepsilon = 0.01$.

Как видно из рисунка 2, плотность $p(\tau_r)$ удовлетворяет экспоненциальному закону

$$p(\tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r \rangle} \exp \left(- \frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle} \right), \quad (1.2)$$

или

$$\ln p(\tau_r) = C - \frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle}, \quad (1.3)$$

где $\langle \tau_r \rangle$ — среднее значение времен возврата в окрестность выбранной точки, $C = \ln(1/\langle \tau_r \rangle)$. Экспериментальные графики рисунка 2 соответствуют теоретическим прямым (3) с наклоном $k = -\frac{1}{\langle \tau_r \rangle}$. Видно, что в отсутствие шума ($D = 0$) и при $D = 10^{-4}$ наклоны прямых различны. В присутствии воздействия $\langle \tau_r \rangle$ увеличивается и, соответственно, наклон $k = 1/\langle \tau_r \rangle$ уменьшается.

Аналогичные результаты были получены при выборе в качестве начальных других точек аттрактора. Отметим, что экспериментальные зависимости удовлетворяют экспоненциальному закону (1.2) только на больших временах $\tau_r \geq \tau_r^* = 30$, что соответствует теории [3].

2. Возвраты Пуанкаре в неавтономной системе

Проведем расчет плотности распределения $p(x)$ в неавтономной системе. Результаты представлены на рисунке 3. Как видно из рисунка 3, внешнее воздействие заметно меняет распределение $p(x)$, а следовательно, и статистику времен возврата. Исследуем структуру плотности распределения времен возврата $p(x)$ в случае гармонического воздействия на систему. Данные расчетов приведены на рисунке 4 и свидетельствуют о том, что плотность $p(\tau_r)$ оказывается периодически промодулированной функцией с периодом модуляции, равным периоду внешней силы [8]. Отметим, что для удобства вычислений (при расчетах стробоскопических сечений) частота внешней силы в (1.1) выбирается кратной π . В случае $\Omega = \pi/30$

$$\Omega = 2\pi f, \quad f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{60}, \quad T = \frac{1}{f} = 60. \quad (2.1)$$

Как видно из графиков на рисунке 4, период модуляции плотности $p(\tau_r)$ соответствует $T \approx 60$, то есть периоду внешней гармонической силы. Характер модуляции существенно зависит от выбранной точки x_0 и амплитуды силы A (см. рис. 4).

При том, что период модуляции сохраняет величину $T \approx 60$, функция модуляции меняется от почти синусоидальной до импульсной (рис. 4). В случае, когда модуляция $p(\tau_r)$ осуществляется по закону, близкому к синусоидальному, плотность $p(\tau_r)$ можно аппроксимировать функцией:

$$p^*(\tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r \rangle} \exp \left\{ -\frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle} + f(\tau_r, A) \sin(\Omega \tau_r + \phi) \right\} \quad (2.2)$$

или

$$\ln p^*(\tau_r) = C - \frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle} + f(\tau_r, A) \sin(\Omega \tau_r + \phi).$$

В выражении (2.2) использован тот факт, что в отсутствие модуляции $f(\tau_r, A) = 0$ распределение $p(\tau_r)$ удовлетворяет экспоненциальному закону (1.2). На рисунке 5 приведены данные аппроксимации для значения амплитуды воздействия $A = 0.01$.

Если рассчитать спектр Фурье функции $p(\tau_r)$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} p(\tau_r) \exp(-j\omega\tau_r) d\tau_r, \quad (2.3)$$

то в спектре $F(\omega)$ на частоте $\omega = \Omega$ должен иметь место ярко выраженный пик. В отсутствие возмущения ($A = 0$) пик в спектре на частоте $\omega = \Omega$ будет отсутствовать, а при усложнении модулирующей функции в спектре должны будут присутствовать гармоники частоты модуляции $\omega_n = n\Omega$, $n = 1, 2, \dots$. Расчеты этот факт подтверждают (см. рис. 6).

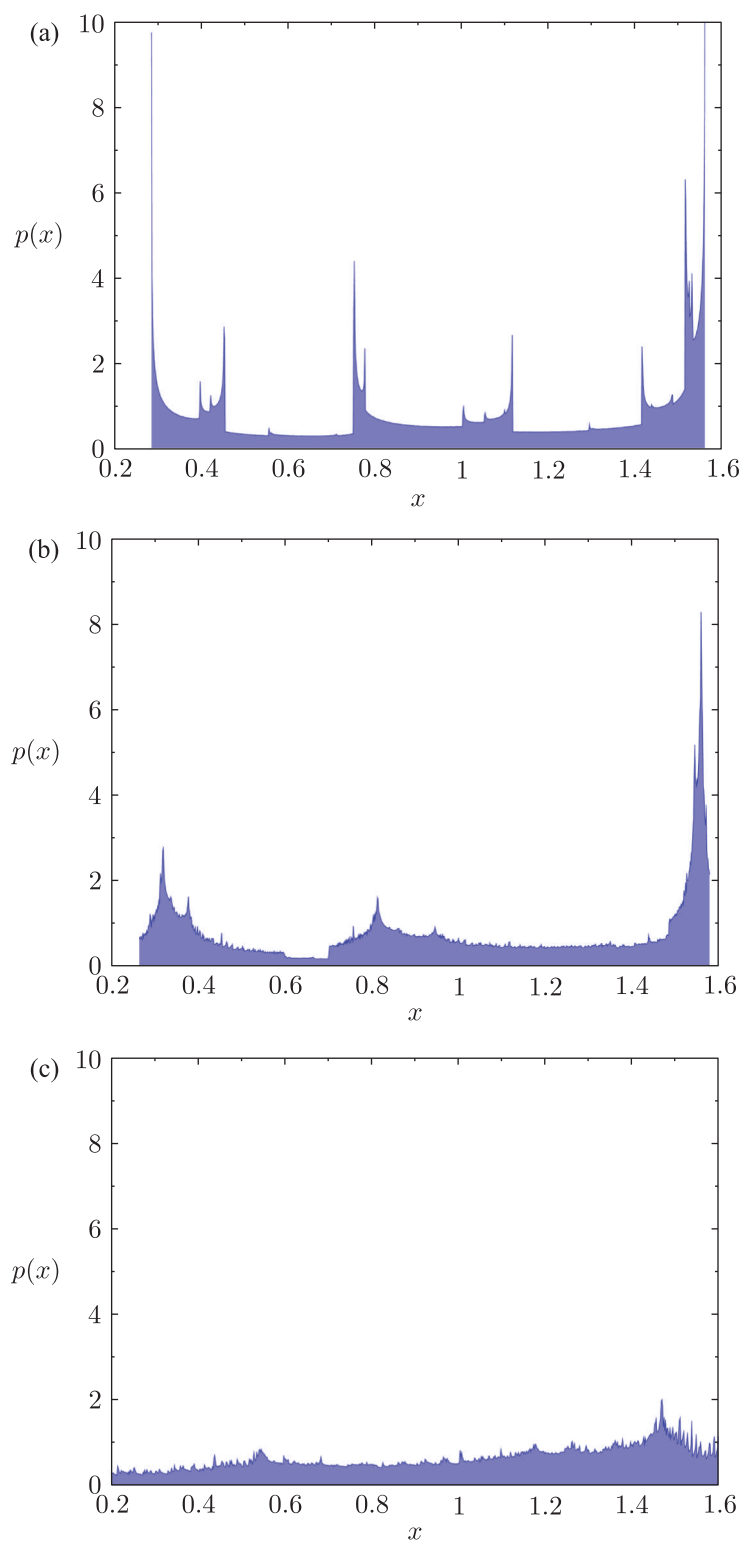


Рис. 3. Плотность распределения вероятности $p(x)$ для различных значений амплитуды внешнего воздействия: (a) $A = 0$, (b) $A = 0.01$, (c) $A = 0.1$. Фиксированные значения параметров: $\alpha = 2.7$, $\varepsilon = 0.01$, $D = 0$, $\Omega = \pi/30$.

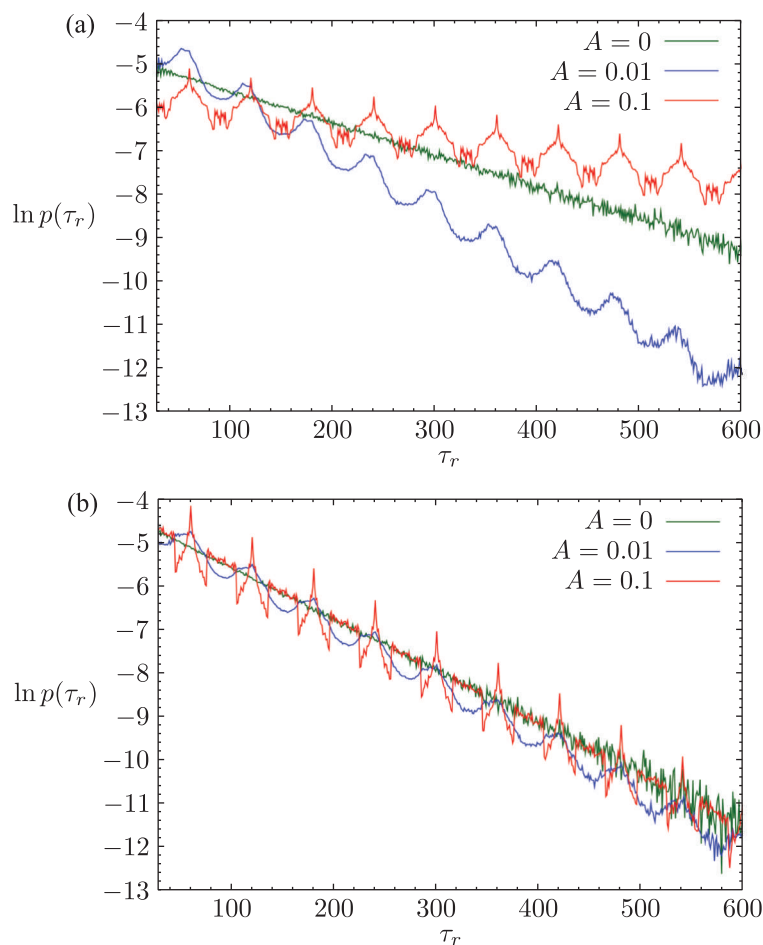


Рис. 4. Плотность распределения времен возврата Пуанкаре для различных значений амплитуды внешнего воздействия для двух точек: (a) $x_0 = 0.38$, (b) $x_0 = 1.5$. Фиксированные значения параметров: $\alpha = 2.7$, $\varepsilon = 0.01$, $D = 0$, $\Omega = 30$.

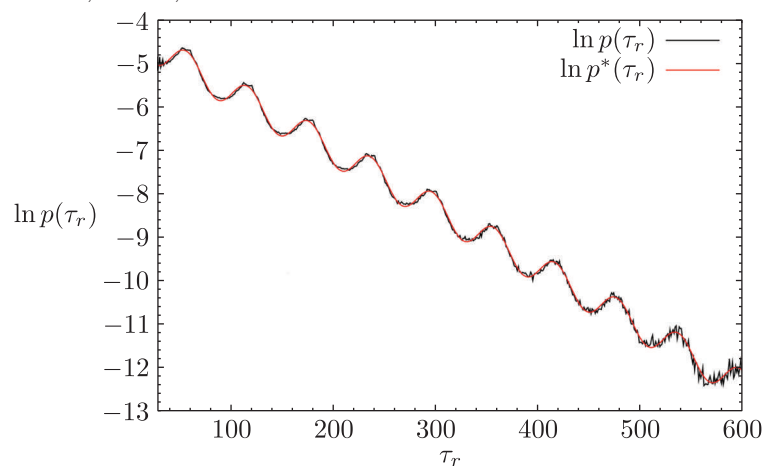


Рис. 5. Плотность распределения времен возврата Пуанкаре в неавтономной системе $p(\tau_r)$ и вид аппроксимирующей функции $p^*(\tau_r)$ для точки $x_0 = 0.38$ для амплитуды внешнего воздействия $A = 0.01$ (фиксированные значения параметров: $\alpha = 2.7$, $\varepsilon = 0.01$, $D = 0$, $\Omega = \pi/30$). Здесь $f(\tau_r, A) = 0.35$.

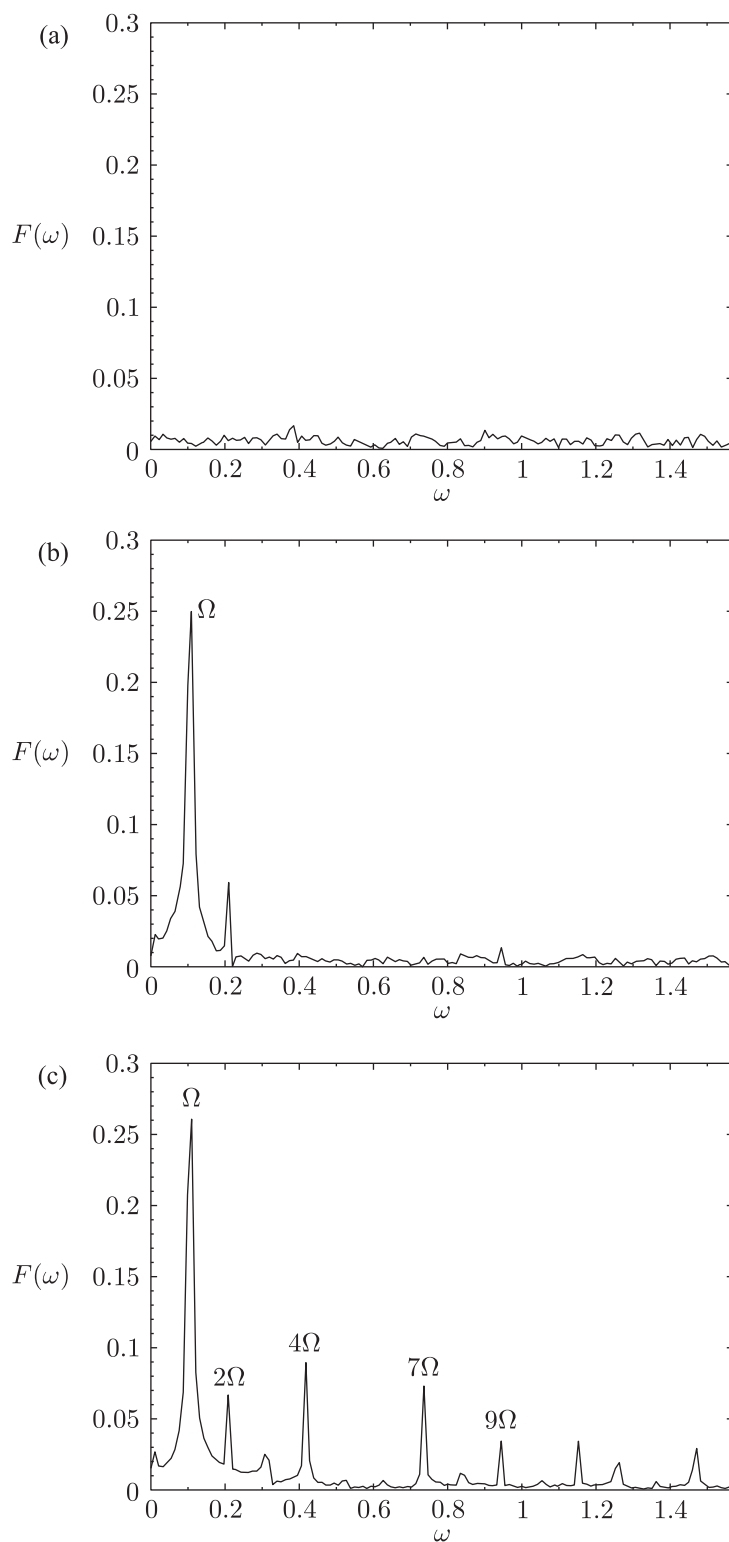


Рис. 6. Спектр функции $p(\tau_r)$, рассчитанной для точки $x_0 = 0.38$ для различных значений амплитуд внешнего воздействия: (a) $A = 0$, (b) $A = 0.01$, (c) $A = 0.1$. Фиксированные значения параметров: $\alpha = 2.7$, $\varepsilon = 0.01$, $D = 0$, $\Omega = \pi/30$.

В случае отсутствия воздействия ($A = 0$, рис. 6а) спектр напоминает спектр белого шума. При малой амплитуде $A = 0.01$ модуляция близка к синусоидальной и в спектре ярко выделяется максимум на частоте $\omega = \Omega$. С увеличением амплитуды закон модуляции становится отличным от гармонического и спектр обогащается гармониками $n\Omega$ (рис. 6с).

Рассмотрим статистику времен возврата с использованием метода стробоскопического отображения. С этой целью будем фиксировать точки отображения (1.1) через период внешней силы. На полученном множестве построим плотность распределения $p(x)$, где x — точки в стробоскопическом сечении. Данные расчетов представлены на рисунке 7 и свидетельствуют о заметном отличии $p(x)$ от данных на рисунке 3. Так как стробоскопическое сечение исключает влияние периодической силы в (1.1), то можно ожидать, что плотность распределения времен возврата для точек в стробоскопическом отображении не будет содержать периодической модуляции. Данные расчетов представлены на рисунке 8 и подтверждают сказанное. Как видно из графиков рисунка 8, периодическая модуляция исчезла. При этом характер зависимостей $p(\tau_r)$ подтверждает справедливость экспоненциального распределения (1.2), в котором величина $\langle \tau_r \rangle$ оказывается зависящей от амплитуды внешней силы A и от выбранной начальной точки аттрактора.

3. Размерность Афраймовича – Песина. Влияние шума и периодического воздействия

Следуя определению АП-размерности при глобальном подходе, покроем аттрактор системы (1.1) малыми отрезками размером ε_i ($i = 1, 2, \dots, N$) и вычислим среднее значение минимального времени возврата $\langle \tau_{inf} \rangle$ по всем элементам покрытия [15, 16]. Как следует из теории [4], в случае хаотической динамики топологическая энтропия $h_T > 0$ и справедливо соотношение

$$\langle \tau_{inf} \rangle = C - \frac{d}{\alpha_C} \ln(\varepsilon), \quad (3.1)$$

где C — константа, d — фрактальная размерность аттрактора, α_C — АП-размерность. Характер плотности распределения $p(x)$ системы (1.1) как в автономном, так и в неавтономном режиме позволяет полагать, что $d = 1$. Аттрактор системы (1.1) всюду плотно покрывает одномерный отрезок (или отрезки) на оси OX . Если $d = 1$, то, рассчитав зависимость (3.1) и определив наклон соответствующих прямых $|k| = \frac{d}{\alpha_C}$, мы можем определить $\alpha_C = \frac{1}{|k|}$.

Тщательные расчеты $\langle \tau_{inf} \rangle$ для системы (1.1) в присутствии внешней силы ($A > 0$) и шума ($D > 0$) показали, что теоретически закономерность (3.1) достаточно хорошо подтверждается экспериментом. Наличие внешних возмущений приводит к тому, что АП-размерность возрастает по сравнению с автономным случаем. При этом линейная зависимость (3.1) в неавтономном случае достигается лишь при $\ln \varepsilon \leq -6$, что требует увеличения времени расчетов. В качестве иллюстрации сказанного на рисунке 9 приведены данные расчетов зависимости (3.1) для различных значений амплитуды гармонического воздействия A в условиях действия шума интенсивности $D = 10^{-4}$. Видно, что с увеличением A наклон графиков уменьшается, свидетельствуя о росте АП-размерности.

В заключение обсудим вопрос о взаимосвязи АП-размерности с величиной положительного показателя Ляпунова λ^+ . В работах [6, 17] было показано, что $\alpha_C \approx h_T$. Оценкой для величины топологической энтропии h_T служит в общем случае сумма положительных показателей или энтропия Колмогорова – Синае. Для одномерного отображения (1.1) в отсутствие внешних сил ($A = 0$, $D = 0$) этот вывод подтверждается (см. рис. 10).

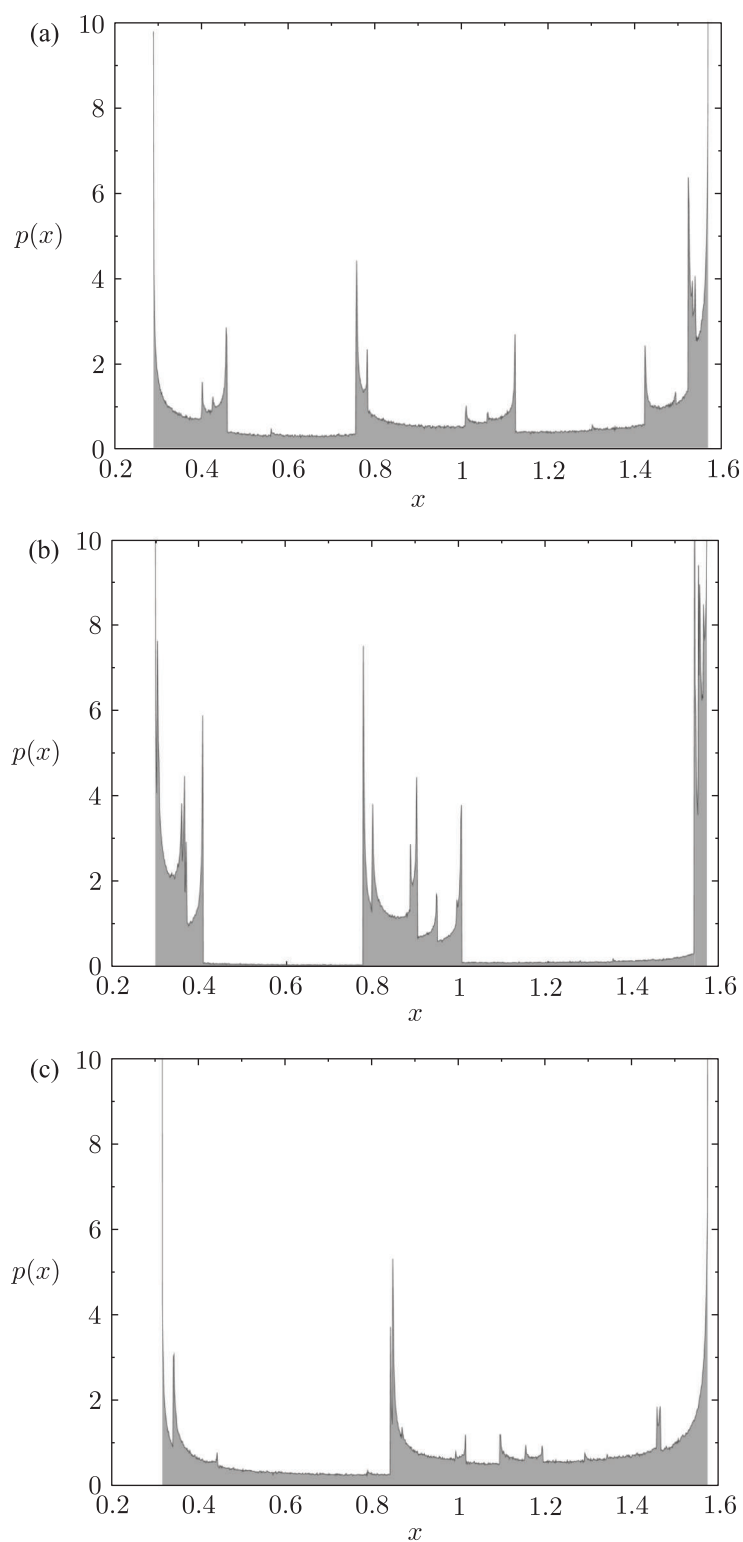


Рис. 7. Плотность распределения вероятности $p(x)$ для точек стробоскопического сечения неавтономной системы для различных значений амплитуды внешнего воздействия: (a) $A = 0$, (b) $A = 0.01$, (c) $A = 0.05$. Фиксированные значения параметров: $\alpha = 2.7$, $\varepsilon = 0.01$, $D = 0$, $\Omega = \pi/30$.

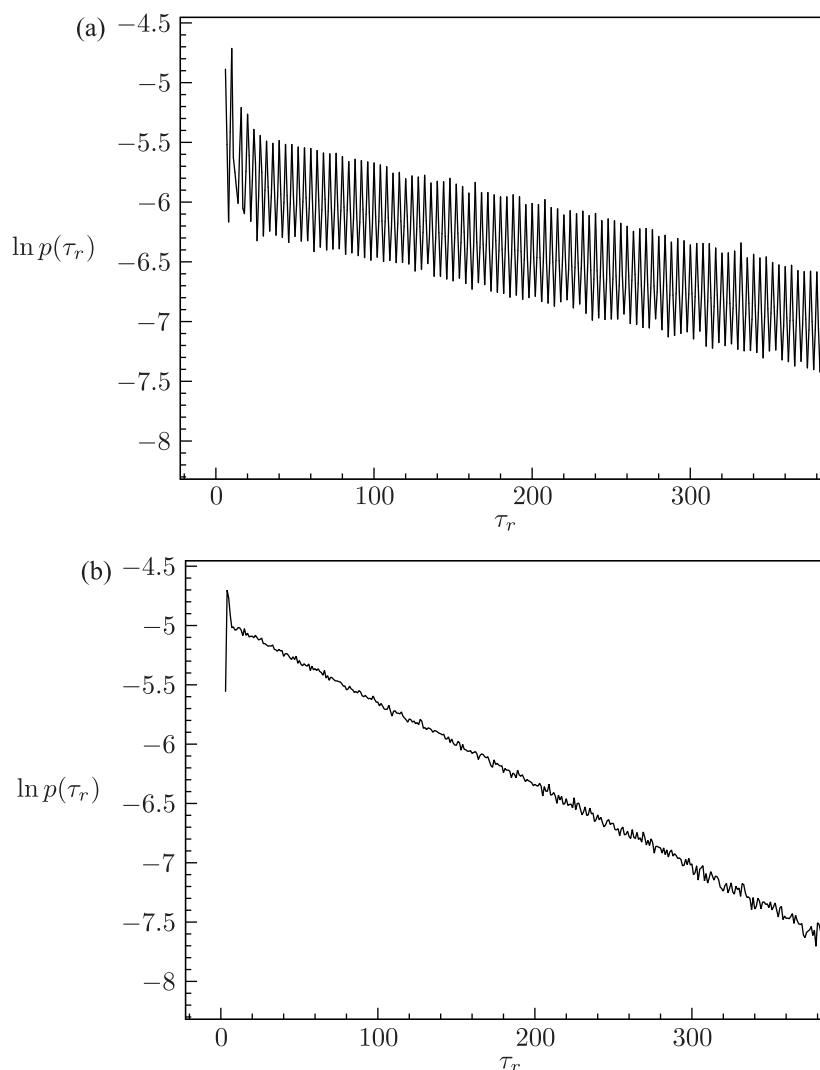


Рис. 8. Распределение плотности вероятности времен возврата Пуанкаре $p(\tau_r)$ при $\alpha = 2.7$, $A = 0.1$, $\Omega = \pi/2$, $\varepsilon = 0.01$, $x_0 = 1.1$: (a) для исходной неавтономной системы, (b) для стробоскопического сечения.

В неавтономной системе, как показали детальные расчеты, показатель Ляпунова не соответствует АП-размерности. Об этом свидетельствуют данные численного эксперимента, приведенные на рисунке 11 и рисунке 12.

4. Заключение

В работе представлены результаты численного анализа статистики возвратов Пуанкаре в одномерном кубическом отображении в присутствии гармонического и шумового возмущений. Основные результаты следующие:

1. Установлено, что в присутствии гармонического воздействия с периодом T плотность распределения $p(\tau_r)$ времен возвратов оказывается периодически промодулированной с периодом внешней силы (рис. 4).

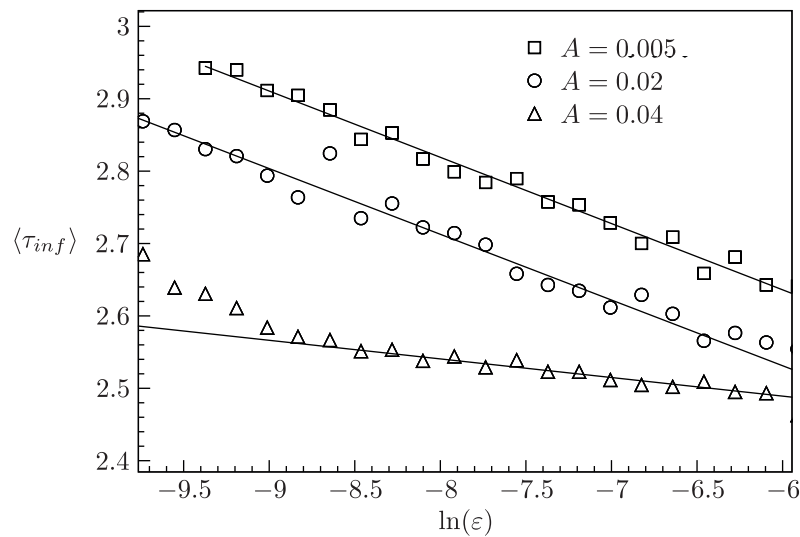


Рис. 9. Зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре $\langle \tau_{inf} \rangle$ от размера области возврата ε для различных значений амплитуды гармонического воздействия A при $a = 2.7$, $b = 10$, $\Omega = \pi/30$, $D = 0.0001$.

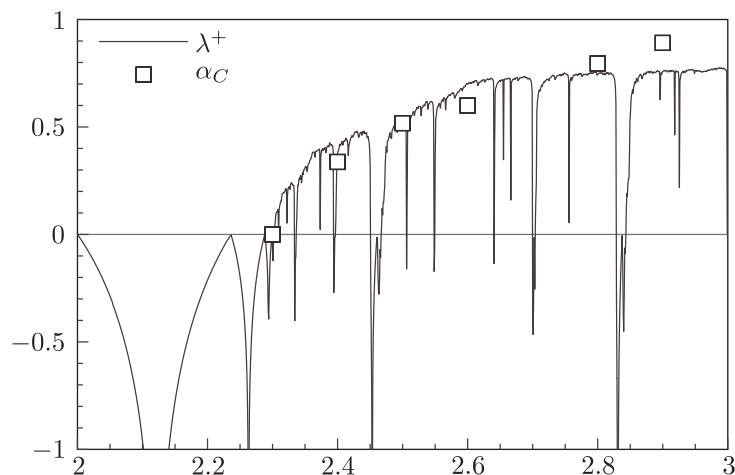


Рис. 10. Зависимости ляпуновского показателя λ^+ и АП-размерности α_C от параметра a отображения (1.1) в отсутствие внешних сил ($A = 0$, $D = 0$).

- Показано, что выражение (3.1), определяющее величину АП-размерности α_C , оказывается справедливым не только для автономной, но и для неавтономной системы (1.1) как при гармоническом, так и при шумовом возмущениях.
- Внешнее возмущение системы (1.1) ($A > 0$, $D > 0$) приводит к росту АП-размерности, что отражает увеличение степени сложности динамики системы.
- Установлено, что в неавтономной системе (1.1) нарушается равенство АП-размерности и положительного показателя Ляпунова λ^+ , доказанное для автономного случая.
- Результаты работы получены путем анализа одномерных множеств $\{x_n\}$ системы (1.1) при различных условиях. По нашему мнению, фундаментальной причиной установленных закономерностей являются различия в вероятностной мере $p(x)$ множеств $\{x_n\}$, полученных для рассматриваемых условий воздействия.

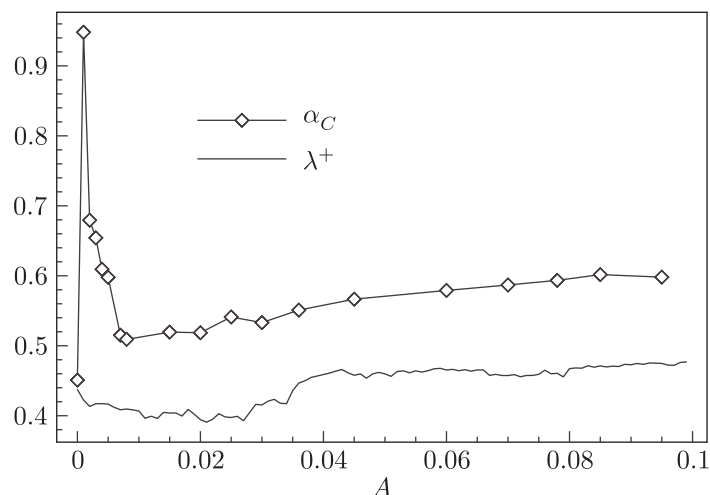


Рис. 11. Зависимость ляпуновского показателя λ^+ и АП-размерности α_C от амплитуды внешнего гармонического воздействия A при $\alpha = 2.7$, $\Omega = \pi/30$, $D = 0$.

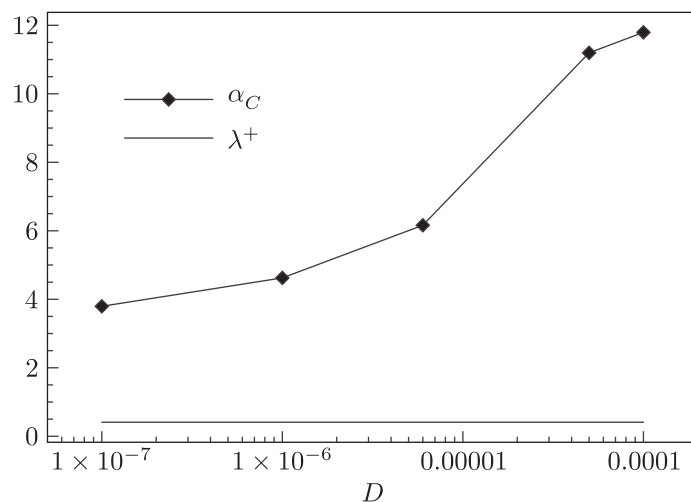


Рис. 12. Зависимость ляпуновского показателя λ^+ и АП-размерности α_C от интенсивности шумового воздействия D при $\alpha = 2.7$, $A = 0$.

В заключение отметим, что некоторые данные численного эксперимента были получены студенткой О. Янгватовой при выполнении дипломной работы.

Список литературы

- [1] Пуанкаре А. Избранные труды: В 3-х тт.: Т. 2: Топология. Теория чисел. Москва: Наука, 1972. 1000 с.
- [2] Кас М. Probability and related topics in physical sciences: With special lectures by G. E. Uhlenbeck, A. R. Hibbs, and B. van der Pol // Lectures in applied mathematics: Proc. of the Summer Seminar (Boulder, CO, 1957): Vol. 1. London: Interscience Publ., 1959. 266 pp.
- [3] Hirata M., Saussol B., Vaienti S. Statistics of return times: A general framework and new applications // Comm. Math. Phys., 1999, vol. 206, no. 1, pp. 33–55.

- [4] Афраймович В., Угальде Э., Уриас Х. Фрактальные размерности для времен возвращения Пуанкаре. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. 290 с.
- [5] Анищенко В. С., Астахов С. В. Теория возвратов Пуанкаре и ее приложение к задачам нелинейной физики // УФН, 2013, т. 183, № 10, с. 1009–1028.
- [6] Anishchenko V. S., Astakhov S. V., Boev Y. I., Biryukova N. I., Strelkova G. I. Statistics of Poincaré recurrences in local and global approaches // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2013, vol. 18, no. 12, pp. 3423–3435.
- [7] Четаев Н. Г. Об устойчивости в смысле Пуассона // Учен. зап. Казан. гос. ун-та, 1929, т. 89, № 2, с. 199–201.
- [8] Anishchenko V. S., Boev Y. I. Diagnostics of stochastic resonance using Poincaré recurrence time distribution // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2013, vol. 18, no. 4, pp. 953–958.
- [9] Afraimovich V. Pesin's dimension for Poincaré recurrences // Chaos, 1997, vol. 7, no. 1, pp. 12–20.
- [10] Анищенко В. С., Нейман А. Б. Увеличение длительности корреляций при перемежаемости типа «хаос – хаос» // Письма в ЖТФ, 1987, т. 13, № 17, с. 1063–1066.
- [11] Anishchenko V. S., Neiman A. B., Chua L. O. Chaos-chaos intermittency and $1/f$ noise in Chua's circuit // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 1994, vol. 4, no. 1, pp. 99–107.
- [12] Anishchenko V. S., Ebeling W. Effects of strong noise on attractors of dynamical systems // Z. Phys. B Condensed Matter, 1990, vol. 81, no. 3, pp. 445–450.
- [13] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Окрокверцхов Г. А., Стрелкова Г. И. Статистические свойства динамического хаоса // УФН, 2005, т. 175, с. 163–179.
- [14] Anishchenko V., Khairulin M., Strelkova G., Kurths J. Statistical characteristics of the Poincaré return times for an one-dimensional nonhyperbolic map // Eur. Phys. J. B, 2011, vol. 82, pp. 219–225.
- [15] Afraimovich V., Lin W. W., Rulkov N. F. Fractal dimension for Poincaré recurrences as an indicator of synchronized chaotic regimes // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2000, vol. 10, no. 10, pp. 2323–2337.
- [16] Анищенко В. С., Астахов С. В., Боев Я. И., Куртс Ю. Возвраты Пуанкаре в системе с хаотическим нестранным аттрактором // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 29–41.
- [17] Penné V., Saussol B., Vaienti S. Fractal and statistical characteristics of recurrence times // J. Phys. IV France, 1998, vol. 8, Pr6-163–Pr6-171.

Statistics of Poincaré recurrences in nonautonomous chaotic 1D map

Yaroslav I. Boev¹, Nadezhda I. Biryukova², Vadim S. Anishchenko³

International Research Institute of Nonlinear Dynamics

Saratov State University

Astrakhanskaya 83, Saratov, 410026, Russia

¹boev.yaroslav@gmail.com, ²biryukovanadezhda@gmail.com, ³wadim@info.sgu.ru

The statistics of Poincaré recurrences is studied numerically in a one-dimensional cubic map in the presence of harmonic and noisy excitations. It is shown that the distribution density of Poincaré recurrences is periodically modulated by the harmonic forcing. It is substantiated that the theory of the Afraimovich – Pesin dimension can be applied to a nonautonomous map for both harmonic and noisy forcings. It is demonstrated that the relationship between the AP-dimension and Lyapunov exponents is violated in the nonautonomous system.

MSC 2010: 37B20

Keywords: Poincaré recurrence, probability measure, Afraimovich – Pesin dimension

Received January 14, 2014, accepted January 24, 2014

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 3–16 (Russian)

